

ARITHMETIC PROGRESSION

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी समान्तर या अंकगणितीय श्रेणी कहलाती है जो एक समान राशि से लगातार बढ़ती या घटती हो। यह समान राशि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अन्तर होता है जिसे पदांतर (common difference) कहते हैं। इस पदांतर को 'd' से प्रदर्शित करते हैं। जैसे-

श्रेणी 1, 3, 5, 7, 9 में पदांतर(d) +2 है ($3-1 = 5-3 = 9-7 = +2$)

श्रेणी 16, 14, 12, 10, 8 में पदांतर(d) -2 है ($14-16 = 12-14 = 8-10 = -2$)

Prof. Anil Kumar Mahto
Department of Commerce,
J. N. College, Madhubani

- **Finding the n^{th} term of an arithmetic progression where n is any positive integer**
समान्तर श्रेणी का n वां पद ज्ञात करना जहां कि n कोई धनात्मक पूर्णांक है

समान्तर श्रेणी के पदों(Terms) को T से प्रदर्शित करते हैं (प्रथम पद को T_1 से, दूसरे पद को T_2 से, n^{th} पद को T_n से इत्यादि) एवं पदांतर (common difference) को d से प्रदर्शित करते हैं। मान ले $T_1 = a$, तब

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_n
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	
a	$a+(2-1)d$	$a+(3-1)d$	$a+(4-1)d$	$a+(5-1)d$	$a+(n-1)d$

n वां पद (T_n) निकालने का सूत्र

$$T_n = a + (n - 1) d$$

Where,

$T_n = N^{\text{th}}$ Term

$a =$ First Term

$d =$ common difference

- **Finding the sum of n terms of an arithmetic progression**

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करना

यदि श्रेणी के पदों की संख्या परिमित (finite) हो, तो उसके प्रथम n पदों का योग-मान में अन्तिम पद l है।

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर,

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

दोनों श्रेणियों को जोड़ने पर,

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\ &= n(a+l), \quad \text{(where number of terms is 'n')} \end{aligned}$$

So,

$$S_n = \frac{N}{2} (a + l), \quad \text{(where } l = T_n = a + (n - 1) d$$

$$S_n = \frac{N}{2} [a + a + (n - 1)d],$$

$$S_n = \frac{N}{2} [2a + (n - 1)d],$$

ILLUSTRATIONS

Problem 1

श्रेणी 10, 8, 6, 4,.....का 6वाँ तथा 19वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 6th and 19th term of the series 10, 8, 6, 4,.....

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 10$ तथा सार्व अन्तर, $d = 8 - 10 = -2$ है।

$$n\text{वाँ पद, } T_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow T_6 = 10 + (6 - 1) \times (-2) = 10 - 10 = 0$$

$$\text{तथा } T_{19} = 10 + (19 - 1) \times (-2)$$

$$= 10 + 18 \times (-2) = 10 - 36 = -26$$

Problem 2

श्रेणी 3, 7, 11, 15,.....का 10वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 10th and n th term of the series 3, 7, 11, 15,.....

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 3$ तथा सार्व अन्तर, $d = 7 - 3 = 4$ है।

$$n\text{वाँ पद, } T_n = a + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \times 4$$

$$= 3 + 4n - 4 = 4n - 1$$

$$\text{तथा } T_{10} = 3 + (10 - 1) \times 4$$

$$= 3 + 9 \times 4 = 3 + 36 = 39$$

Problem 3

श्रेणी 1, -2, -5, -8,.....का 31वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 31st and n th terms of the series 1, -2, -5, -8,

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 1$ तथा सार्व अन्तर, $d = -2 - 1 = -3$ है।

$$n\text{वाँ पद, } T_n = a + (n - 1)d$$

$$= 1 + (n - 1)(-3)$$

$$= 1 - 3n + 3 = 4 - 3n$$

$$\text{तथा } T_{31} = 1 + (31 - 1)(-3)$$

$$= 1 + 30 \times (-3) = 1 - 90 = -89$$

Problem 4

श्रेणी $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$ का 12वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 12th term of the series $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = \frac{1}{3}$ तथा सार्व अन्तर, $d = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ है।

$$n\text{वाँ पद, } T_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow T_{12} = \frac{1}{3} + (12 - 1) \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{11}{3} = \frac{1 + 11}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Problem 5

श्रेणी $2, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \dots$ का 8वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात करो।

Find the 8th and n th terms of the series $2, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \dots$

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 2$,

$$\text{सार्वअन्तर, } d = \frac{7}{6} - 2 = \frac{7 - 12}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$n\text{वाँ पद, } T_n = a + (n - 1)d$$

$$= 2 + (n - 1) \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$= 2 - \frac{5n}{6} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{12 - 5n + 5}{6} = \frac{17 - 5n}{6}$$

$$\Rightarrow T_8 = \frac{17 - 5 \times 8}{6} = \frac{17 - 40}{6} = \frac{-23}{6}$$

Problem 6

समान्तर श्रेणी 1, 4, 7, का कौन-सा पद 55 होगा ?

Which term of the A.P. 1, 4, 7,.....is 55 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 1$ तथा सार्व अन्तर, $d = 4 - 1 = 3$ है।

मान लो n वाँ पद 55 है।

$$\text{अतः } T_n = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow 55 = 1 + (n - 1) \times 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$$

$$\Rightarrow 3n = 55 + 2 = 57$$

$$\therefore n = \frac{57}{3} = 19$$

\therefore 55 इस श्रेणी का 19वाँ पद है।

Problem 7

स. श्रे. 7, 10, 13,.....का कौन-सा पद 151 होगा ?

Which term of the A.P. 7, 10, 13,.....is 151 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 7$ तथा सार्व अन्तर, $d = 10 - 7 = 3$ है।
माना कि n वाँ पद 151 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } T_n &= a + (n - 1)d \\ \Rightarrow 151 &= 7 + (n - 1) \times 3 = 7 + 3n - 3 = 3n + 4 \\ \Rightarrow 3n &= 151 - 4 = 147 \\ \therefore n &= \frac{147}{3} = 49 \end{aligned}$$

\therefore 151 इस श्रेणी का 49वाँ पद है।

Problem 8

श्रेणी $99 + 92 + 85 + \dots$ का कौन-सा पद 15 होगा ?
Which term of the series $99 + 92 + 85 + \dots$ is 15 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 99$ तथा सार्व अन्तर, $d = 92 - 99 = -7$ है।
माना कि n वाँ पद 15 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } T_n &= a + (n - 1)d \\ \Rightarrow 15 &= 99 + (n - 1)(-7) = 99 - 7n + 7 \\ &= 106 - 7n \\ \Rightarrow 7n &= 106 - 15 = 91 \\ \therefore n &= \frac{91}{7} = 13 \end{aligned}$$

इस प्रकार, 15 इस श्रेणी का 13वाँ पद है।

Problem 9

स. श्रे. 5, 14, 23,..... का कौन-सा पद 239 होगा ?
Which term of the A.P. 5, 14, 23,..... is 239 ?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 5$ तथा सार्व अन्तर, $d = 14 - 5 = 9$ है।
माना कि n वाँ पद 239 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } T_n &= a + (n - 1)d \\ \Rightarrow 239 &= 5 + (n - 1) \times 9 = 5 + 9n - 9 = 9n - 4 \\ \Rightarrow 9n &= 4 + 239 = 243 \\ \therefore n &= \frac{243}{9} = 27 \end{aligned}$$

इस प्रकार, 239 इस श्रेणी का 27वाँ पद है।

Problem 10

क्या 128 श्रेणी $6 + 11 + 16 + \dots$ का कोई पद है ?
Is 128 a term of the series $6 + 11 + 16 + \dots$?

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 6$ तथा सार्व अन्तर, $d = 11 - 6 = 5$ है।
माना कि n वाँ पद 128 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } T_n &= a + (n - 1)d \\ \Rightarrow 128 &= 6 + (n - 1) \times 5 = 6 + 5n - 5 = 5n + 1 \\ \Rightarrow 5n &= 128 - 1 = 127 \end{aligned}$$

$$\therefore n = \frac{127}{5} = 25.4$$

क्योंकि n का मान धनात्मक पूर्णांक नहीं है अतः 128 इस श्रेणी का पद नहीं है।

Problem 11

किसी स. श्रे. के 9वें तथा 19वें पद क्रमशः 35 और 75 हैं तो श्रेणी ज्ञात कीजिए। 20वाँ पद भी बताइए।
The 9th and 19th terms of a series in A.P. are respectively 35 and 75. Find the series and its 20th term.

Solution

मान लो, श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अन्तर d है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } n\text{वाँ पद, } T_n &= a + (n - 1)d \\ \Rightarrow T_9 &= a + (9 - 1)d = a + 8d \\ \Rightarrow a + 8d &= 35 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } T_{19} &= a + (19 - 1)d = a + 18d \\ \Rightarrow a + 18d &= 75 \end{aligned} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए समीकरण (1) को समीकरण (2) में से घटाने पर,

$$\begin{aligned} a + 18d &= 75 \\ a + 8d &= 35 \\ \hline \end{aligned}$$

$$10d = 40$$

$$\therefore d = \frac{40}{10} = 4 \quad \dots(3)$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\begin{aligned} a + 8 \times 4 &= 35 \\ \Rightarrow a + 32 &= 35 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 35 - 32 = 3$$

अतः श्रेणी का 20वाँ पद होगा—

$$\begin{aligned} T_{20} &= a + (20 - 1)d \\ &= 3 + 19 \times 4 = 3 + 76 = 79 \end{aligned}$$

वांछित समान्तर श्रेणी होगी—

$$3, 3 + 4, 3 + 2 \times 4, \dots$$

अर्थात् 3, 7, 11,

Problem 12

उस स. श्रे. का सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद 5 तथा 11वाँ पद - 5 हो।

Find the common difference of an A.P. whose first term is 5 and 11th term is - 5.

Solution

माना कि श्रेणी का सार्वन्तर d है। अतः

$$\begin{aligned} 11\text{वाँ पद, } T_{11} &= a + (11 - 1) \times d \\ \Rightarrow -5 &= 5 + 10 \times d \\ \Rightarrow 10d &= -5 - 5 = -10 \end{aligned}$$

$$\therefore d = \frac{-10}{10} = -1$$

Problem 13

यदि किसी स. श्रे. का 11वाँ पद 44 तथा 16वाँ पद 19 हो तो 20वाँ पद तथा स. श्रे. ज्ञात करो।

If the 11th term of an A.P. is 44 and 16th term is 19, find the 20th term and the A.P.

Solution

मान लो श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।

अतः n वाँ पद, $T_n = a + (n - 1)d$

$$\Rightarrow T_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$

$$\Rightarrow a + 10d = 44 \quad \dots(1)$$

तथा $T_{16} = a + (16 - 1)d = a + 15d$

$$\Rightarrow a + 15d = 19 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$a + 10d = 44$$

$$a + 15d = 19$$

$$\hline -5d = 25$$

$$\therefore d = \frac{25}{-5} = -5 \quad \dots(3)$$

d के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$a + 10 \times (-5) = 44$$

$$\Rightarrow a - 50 = 44$$

$$\therefore a = 50 + 44 = 94 \quad \dots(4)$$

अतः श्रेढी का 20वाँ पद होगा—

$$T_{20} = a + (20 - 1)d$$

$$= 94 + 19 \times (-5) = 94 - 95 = -1$$

वांछित समान्तर श्रेढी होगी—

$$94, 94 + (-5), 94 + 2(-5), \dots$$

अर्थात् 94, 89, 84,

Problem 14

स. श्रे. 3, 5, 7,, 51 का माध्य पद ज्ञात करो।

Find the middle term of the arithmetic progression 3, 5, 7,, 51.

Solution

यहाँ, प्रथम पद, $a = 3$, अन्तिम पद, $l = 51$ तथा सार्व अन्तर, $d = 5 - 3 = 2$ है। अतः

$$l = a + (n - 1)d$$

$$\Rightarrow 51 = 3 + (n - 1) \times 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$\Rightarrow 2n = 51 - 1 = 50$$

$$\therefore n = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{माध्य पद} = \left(\frac{n + 1}{2} \right) \text{वाँ पद}$$

$$= \frac{25 + 1}{2} \text{वाँ पद} = \frac{26}{2} \text{वाँ पद} = 13 \text{वाँ पद}$$

$$T_{13} = a + (13 - 1)d$$

$$= 3 + 12 \times 2 = 3 + 24 = 27$$

Problem 15

k का मान बताओ यदि 5, k , 11 स. श्रे. में हों।

Find the value of k if 5, k , 11 are in A.P.

Solution

यदि 5, k , 11 स. श्रे. में हैं तो

$$k - 5 = 11 - k$$

$$\Rightarrow k + k = 11 + 5$$

$$\Rightarrow 2k = 16$$

$$\therefore k = \frac{16}{2} = 8$$

.....

The end

.....